

К ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО КАНАЛА ПОДВОДНОГО ИСКРОВОГО РАЗРЯДА НА АКТИВНОЙ СТАДИИ

В рамках приближения Кірквуда-Бете розглядається задача про розширення каналу підводного іскрового розряду (ПІР) в випадку сферичної симетрії течії протягом часу, що відповідає введенню в канал електричної енергії і відомого під назвою активної стадії. При цьому весь діапазон можливих значень чисел Маха $0 \leq M < \infty$ з метою встановлення простих і достатньо точних аналітичних співвідношень підрозділено на два піддіапазони $0 \leq M \leq 1$ і $M > 1$; шляхом порівняння отриманих в роботі результатів з відомими в літературі даними показано, що встановлені асимптотичні формули, які є чинні при $M \rightarrow 0$ і $M \rightarrow \infty$ задовільно описують процес розширення каналу ПІР при всіх значеннях числа M .

TO THE THEORY WIDENING OF SPHERICAL CHANNEL SUBMARINE SPARK'S DISCHARGE ON THE ACTIVE STAGE

In a frame approach of Keerkwood-Bete the task about widening of channel submarine spark's discharge (SSD) in a case of spherical symmetry stream for the time, which meet to introduction the electrical power in the channel and which known as active stage. In spite of this all diapason of possible meanings numbers of Makh $0 \leq M < \infty$ in order to establishment of the simple and sufficiently exact analytical correlations was divided on two sub-diapasons $0 \leq M \leq 1$ and $M > 1$; in the way of comparison receiving in a work results with known from the literature facts was shown, that settled asimptotical formulas, which appears valid at $M \rightarrow 0$ and $M \rightarrow \infty$ satisfactorily described the process widening channel of SSD at all significances of number M .

1. **Основные уравнения задачи.** Для придания излагаемому материалу известной автономности приведем здесь заимствованную из работ [1,3] систему уравнений, описывающих процесс расширения сферического канала ПІР. При этом представляется целесообразным использовать безразмерные переменные x, y, z, η, ζ представить время t , локальную скорость звука c , радиус канала R давление P и энтропию H на его стенке, а также закон $E(t)$ ввода энергии в канал в виде [1,3]

$$\begin{aligned}
 t &= x \tau, \quad R = y R_0, \quad c = z c_0, \\
 P &= \zeta \rho_0 R_0 / \tau^2, \quad H = \eta R_0 / \tau, \\
 R_0^5 &= \frac{3}{4\pi\rho_0} (\gamma - 1) \tau^2 E_0, \quad E(t) = f(x) E_0, \\
 f(x) &= \begin{cases} 2x^2 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 2x^2 - 1 & \text{при } 1/2 \leq x \leq 1, \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

где ρ_0 - плотность жидкости до разряда; c_0 - скорость звука в невозмущенной жидкости; τ, E_0 - длительность разряда и полная энергия, введенная в канал за время τ ; R_0 - характерный радиус канала; γ - показатель адиабаты, заполняющей канал плазмы, $\gamma = 1,26$ [3].

С учетом принятых обозначений изучение процесса расширения канала разряда в приближении Кирквуда-Бете [1-3] сводится к интегрированию следующей системы уравнений [1,3]

$$\zeta' = \frac{f'}{y^3} - 3\gamma \frac{\zeta}{y} y',$$

$$y'' = \frac{1 + M \cdot \frac{y'}{z}}{1 - M \cdot \frac{y'}{z}} \cdot \frac{\eta}{y} + M \cdot \frac{\eta'}{z} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3} \cdot M \cdot \frac{y'}{z} \cdot (y')^2}{1 - M \cdot \frac{y'}{z} \cdot y}, \quad (2)$$

$$z = (1 + nM^2 \zeta)^{\frac{n-1}{2n}},$$

$$\eta = \frac{z^2 - 1}{(n-1)M^2}$$

относительно неизвестных y, z, η, ζ , удовлетворяющих при $x = 0$ начальным условиям

$$y = \eta = \zeta = 0, \quad z = 0$$

Обычно [1,3] интегрирование системы уравнений (2) производится с помощью численных методов. Именно эти методы позволили накопить информацию об искомым функциях, используемую в настоящей работе при установлении приближенных аналитических интегралов рассматриваемой системы уравнений.

В соответствии с указанной информацией процесс расширения канала ПИР обладает рядом специфических особенностей, из которых при построении приближенного решения системы (2) следует выделить:

- слабую зависимость параметров канала ПИР от числа Маха при $0 \leq M \leq 1$;
- незначительную их зависимость от начальных данных;
- существенное влияние на формирование канала первой половины промежутка τ , в течение которой происходит нарастание электрической мощности.

2. Преобразование системы уравнений (2). В силу отмеченных обстоятельств нахождение приближенного решения системы (2) может быть произведено в соответствии со следующей схемой.

Сначала весь диапазон чисел Маха $0 \leq M < \infty$ подразделяется на два - $J_1 = \{M \mid 0 \leq M \leq 1\}$ и $J_2 = \{M \mid M > 1\}$ - и на каждом из них система уравнений (2) заменяется несколько более простой, полученной из (2) в предположении, что $M \rightarrow 0$ или $M \rightarrow \infty$. Затем при игнорировании начальных условий, наложенных на η и ζ (а в случае $M > 1$ и на z), определяется частное на

$0 \leq x \leq 1/2$ решение упомянутых упрощенных систем уравнений, которое распространяется на весь сегмент $0 \leq x \leq 1$.

В первом случае $M \in J_1$, такая упрощенная система уравнений

$$\begin{aligned} y^3 \zeta' + 3\gamma \cdot y^2 \cdot y' \cdot \zeta &= f', \\ y'' y + \frac{3}{2} \cdot (y')^2 - \zeta &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

получена из соотношений (2) посредством предельного при $M \rightarrow 0$ перехода.

Во втором случае $M \in J_2$ для получения упрощенной системы уравнений следует предположить, что $M \rightarrow \infty$, удержав в выражениях для z и η низшие относительно $1/M$ слагаемые

$$z \sim M^{1-\frac{1}{n}} (n \cdot \zeta)^{\frac{n-1}{2n}}, \quad \eta \sim M^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n-1} (n \cdot \zeta)^{1-\frac{1}{n}}$$

Чтобы из системы (2) получить содержательную систему уравнений для определения y и ζ при $M \rightarrow \infty$ необходимо дополнительно предположить, что: произведение $y^3 \zeta \sim M^0 = 1$; $z \sim M \cdot y'$ при $M \rightarrow \infty$.

Одновременное удовлетворение последним предположениям возможно только в том случае, когда слагаемые низшего порядка относительно $1/M$ при $M \rightarrow \infty$ для y и ζ будут иметь вид

$$y \sim M^{\frac{2}{5n-3}} \cdot y_1, \quad \zeta \sim M^{\frac{6}{5n-3}} \cdot \zeta_1, \quad (4)$$

где y_1 и ζ_1 зависят от переменной x .

Выпишем упрощенную систему уравнений для определения величин y_1 и ζ_1 :

$$\begin{aligned} y_1^3 \zeta_1' + 3\gamma \cdot y_1' \cdot \zeta_1 &= f', \\ (z_1 - y_1') \cdot (y_1'' - \frac{2 \cdot z_1'}{n-1}) \cdot y_1 + \frac{3}{2} (z_1 - \frac{1}{3} y_1') (y_1')^2 - (z_1 + y_1') \frac{z_1^2}{n-1} &= 0, \\ z_1 &= (n \cdot \zeta_1)^{\frac{n-1}{2n}} \end{aligned} \quad (5)$$

3. Приближенное решение систем уравнений (3) и (5) на сегменте $0 \leq x \leq 1/2$. Нетрудно видеть, что система уравнений (3) допускает существование на сегменте $0 \leq x \leq 1/2$ решений вида

$$y = Ax^a, \quad \zeta = B \cdot x^b, \quad (6)$$

где A , a и B , b – подлежащие определению постоянные.

Подставляя соотношения (6) в систему уравнений (3) и приравнявая показатели степеней x и значения коэффициентов при одинаковых степенях x , получим систему алгебраических уравнений для нахождения значений констант A , a и B , b :

$$\begin{aligned} A^3 B \cdot (b + 3\gamma \cdot a) &= 4, \\ 3a + b - 1 &= 1, \\ B &= A^2 \left(\frac{5}{2} \cdot a - 1 \right) \cdot a, \\ b &= 2 \cdot (a - 1). \end{aligned} \tag{7}$$

Из системы уравнений (7) следует, что указанные константы определяются формулами

$$\begin{aligned} a &= 4/5, & b &= -2/5, \\ A^5 &= \frac{4}{\left(\frac{5}{2}a - 1\right) \cdot a \cdot [3 \cdot \gamma \cdot a + 2(a - 1)]}; & A &= 1,1376305, \\ B &= A^2 \left(\frac{5}{2}a - 1\right) \cdot a; & B &= 1,0353625. \end{aligned} \tag{8}$$

Совершенно аналогичным образом можно установить, что и система уравнений (5) на сегменте $0 \leq x \leq 1/2$ имеет функции вида (6) в качестве частных интегралов. Однако константы A , a и B , b находятся из несколько более сложных, чем (7), уравнений

$$\begin{aligned} 3a + b &= 2, \\ a &= 1 + b \frac{n-1}{2n}, \\ (b + 3\gamma \cdot a) \cdot A^3 B &= 4, \\ (n \cdot B)^{\frac{n-1}{2n}} &= s \cdot A, \\ (s - a) \left[a \cdot (a - 1) - s \frac{b}{n} \right] + \frac{3}{2} a^2 \left(s - \frac{a}{3} \right) - \frac{s + a}{n-1} \cdot s^2 &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

причем, для надлежащего определения величин A и B следует выбирать наибольший корень s_0 последнего кубического уравнения.

При известном s_0 решение системы уравнений определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
a &= \frac{4n-2}{5n-3}, \quad b = -\frac{2n}{5n-3}, \\
B &= \frac{1}{n} (S_0 A)^{\frac{2n}{n-1}}, \\
A &= \left(\frac{4n}{b+3\gamma \cdot a} \right)^{\frac{n-1}{5n-3}} S_0^{-\frac{2n}{5n-3}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Как видно из первых двух равенств соотношений (10) кубическое уравнение для определения корня s_0 может быть сведено к уравнению, коэффициенты которого выражаются через единственный параметр n . При этом целесообразно вместо величины s в указанном уравнении перейти к неизвестной $\sigma = \frac{a}{s}$ и представить уравнение для вычисления σ в виде:

$$\begin{aligned}
F(\sigma) &= 0, \\
F(\sigma) &= \sigma^3 - \frac{5n-4}{n} \sigma^2 + \frac{2}{n-1} \sigma + \frac{2}{n} \cdot \frac{2n-1}{n-1}
\end{aligned} \tag{11}$$

Требуемый корень σ_0 уравнения (11) может быть определен численно методом итераций:

$$\sigma_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_0^{(k)},$$

$$\sigma_0^{(k+1)} = \sigma_0^{(k)} - F(\sigma_0^{(k)}) / F'(\sigma_0^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sigma_0^{(0)} = -p + \sqrt{p^2 + q},$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{5n-4}{n} \right) \cdot \begin{cases} 2p \\ q \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2}{n-1} + \frac{9}{16} \\ \frac{2}{n} \cdot \frac{2n-1}{n-1} + \frac{1}{32} \end{cases}, \tag{12}$$

$$F'(\sigma) = 3\sigma^2 - \frac{5n-4}{n} 2\sigma + \frac{2}{n-1},$$

где $\sigma_0^{(k)}$ - k -ая итерация корня σ_0 кубического уравнения (11).

4. Аппроксимация функций $y(x), y'(x), \zeta(x)$ на сегменте $1/2 \leq x \leq 1$. Продолжение полученных решений упрощенных систем уравнений (3) и (5), справедливых при $0 \leq x \leq 1/2$ на всю активную стадию при $0 \leq x \leq 1$ производится в предположении, что как при $M \rightarrow 0$, так и при $M \rightarrow \infty$ справедливы такие дополнительные допущения:

-упрощенная система уравнений (3) удовлетворительно описывает процесс расширения канала разряда при $1/2 \leq x \leq 1$;

-определенное первым соотношением (6) представление $y = Ax^a$ удовлетворительно аппроксимирует функцию $y(x)$ при $0 \leq x \leq 1$.

Приведенные дополнительные допущения, иными словами означают, что при нахождении функций $y'(x)$, $\zeta(x)$ на сегменте $1/2 \leq x \leq 1$ достаточно использовать только систему уравнений (3) (а не (3) и (5)), полагая при этом функцию $y(x)$ известной и заданной формулой $y = Ax^a$, константы которой A и a должны быть определены из соотношений (8) или (10) в зависимости от того, стремится ли число M к нулю или бесконечности.

С учетом принятых допущений функцию $\zeta(x)$ следует определить из первого уравнения системы (3) формулой

$$\zeta = y^{-3\gamma} \int_0^x f'(x) y^{3(\gamma-1)} dx, \quad (13)$$

справедливой при $0 < x \leq 1$.

Несколько более сложные соображения используются при определении функции $y'(x)$: сначала из системы уравнений (3) исключается функция $\zeta(x)$ и, посредством однократного интегрирования полученного уравнения третьего порядка по x , указанная система сводится к уравнению

$$y^4 y'' + \frac{3}{2} \gamma \cdot y^3 (y')^2 = f;$$

затем, представив последнее уравнение в форме

$$(y^{\frac{3}{2}\gamma} y')' = f \cdot y^{\frac{3}{2}\gamma-4},$$

определяем функцию $y'(x)$ при $1/2 \leq x \leq 1$ соотношением

$$y' = y^{\frac{3}{2}\gamma} \left[C + \int_{1/2}^x f \cdot y^{\frac{3}{2}\gamma-4} dx \right] \quad C = y' \cdot y^{\frac{3}{2}\gamma} \Big|_{x=1/2}, \quad (14)$$

где произвольная постоянная C определяется при использовании выражения

$$y' = a \cdot A \cdot x^{a-1} = a \cdot y/x, \quad (15)$$

имеющего место при $0 < x \leq 1/2$.

Таким образом, формулы (6), (13), (14) и (15) полностью определяют функции $y(x)$, $y'(x)$ и $\zeta(x)$ на всей активной стадии расширения канала ПИР. Отметим, что основной целью приведенного рассмотрения является учет влияния

закона $f(x)$ ввода энергии в канал на активной стадии (см. последнее равенство соотношений (1)).

5. Анализ результатов. Из способа получения упрощенных систем уравнений (3) и (5), справедливых при $M \rightarrow 0$ и $M \rightarrow \infty$ соответственно, следует, что решение первой из них аппроксимирует решение исходной системы (2) тем точнее, чем меньше число Маха M , а решение второй системы – чем это число больше.

Однако, как показывают расчеты, приемлемая точность аппроксимации достигается и при относительно больших (порядка единицы) применительно к первой упрощенной системе и относительно малых (того же порядка) применительно ко второй системе значениях числа Маха.

Суждение об эффективности полученного описанным способом приближенного решения системы (2) на промежутке $0 \leq x \leq 1$ для двух значений числа Маха позволяют составить данные таблицы 1.

Таблица 1 – Безразмерные параметры сферического канала ПИР

x	M=1,0			M=2,0		
	y	y'	ζ	y	y'	ζ
1	2	3	4	5	6	7
0,1	0,183	1,480	2,620	0,177	1,430	2,910
	0,180	1,442	2,601	0,175	1,424	2,821
0,2	0,321	1,300	1,950	0,310	1,260	2,160
	0,314	1,256	1,971	0,308	1,250	2,083
0,3	0,445	2,200	1,640	0,431	1,160	1,810
	0,434	1,158	1,676	0,428	1,159	1,744
0,4	0,562	1,130	1,450	0,544	1,100	1,600
	0,547	1,093	1,494	0,541	1,098	1,538
0,5	0,673	1,090	1,320	0,651	1,060	1,450
	0,653	1,045	1,366	0,648	1,053	1,395
0,6	0,779	1,030	1,150	0,754	0,997	1,260
	0,756	1,004	1,181	0,752	1,049	1,197
0,7	0,877	0,951	0,945	0,851	0,926	1,040
	0,855	0,955	0,954	0,852	0,990	0,961
0,8	0,969	0,877	0,768	0,939	0,854	0,842
	0,952	0,899	0,748	0,949	0,927	0,750
0,9	1,050	0,806	0,619	1,020	0,756	0,678
	1,046	0,840	0,574	1,045	0,862	0,573
1,0	1,130	0,739	0,494	1,100	0,720	0,540
	1,138	0,781	0,431	1,138	0,798	0,427
1,1	1,200	0,683	0,402	1,170	0,665	0,439
	1,228	0,724	0,323	1,230	0,737	0,319
1,2	1,270	0,636	0,337	1,230	0,620	0,378
	1,316	0,671	0,248	1,320	0,680	0,244
1,3	1,330	0,598	0,288	1,290	0,582	0,314
	1,403	0,622	0,195	1,409	0,629	0,191

1	2	3	4	5	6	7
1,4	1,390	0,565	0,251	1,350	0,550	0,273
	1,489	0,578	0,156	1,496	0,582	0,152
1,5	1,440	0,536	0,221	1,400	0,522	0,241
	1,574	0,538	0,126	1,582	0,541	0,123
1,6	1,490	0,500	0,198	1,450	0,498	0,215
	1,657	0,502	0,104	1,667	0,503	0,101
1,7	1,540	0,490	0,178	1,500	0,476	0,194
	1,739	0,469	0,087	1,752	0,470	0,084
1,8	1,590	0,471	0,162	1,550	0,458	0,177
	1,821	0,440	0,073	1,835	0,440	0,070
1,9	1,640	0,454	0,148	1,590	0,441	0,162
	1,901	0,413	0,062	1,917	0,412	0,060
2,0	1,680	0,438	0,137	1,640	0,425	0,149
	1,981	0,389	0,053	1,999	0,388	0,051

y -радиус, y' -скорость, ζ - давление

1 строка – численное интегрирование уравнений Кирквуда-Бете [3]

2 строка – вычисление по асимптотическим формулам

В этой таблице представлены, заимствованные из монографии [3], значения функций $y(x)$, $y'(x)$ и $\zeta(x)$ (первая строка, соответствующая данному значению аргумента x), определенные посредством численного интегрирования системы (2) при значениях числа Маха $M=1$ (левый столбец) и $M=2$ (правый столбец); значения перечисленных функций, вычисленные по формулам (6), (13)-(15), представлены во второй строке для каждого значения x , при использовании обоих наборов констант A , a , B , b из формул (8) (левый столбец таблицы) и (10) (правый столбец).

Более наглядно информацию, содержащуюся в таблице 1, представляют графики функций $y(x)$, $y'(x)$ и $\zeta(x)$, приведенные на рис.1, 2, и 3 соответственно.

6. Выводы. Изложенный материал позволяет констатировать следующее:

- установлены простые аналитические соотношения, предоставляющие возможность приближенного описания процесса расширения сферического канала ПИР на активной стадии при произвольных значениях числа Маха;
- из способа получения указанных соотношений следует возможность их уточнения при использовании методов теории возмущений;
- показано, что число Маха $M = \infty$ является алгебраической точкой ветвления системы уравнений (2), описывающих процесс расширения сферического канала ПИР на активной стадии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.В. , Швец И.С., Иванов А.В. Подводные искровые разряды. - Киев: Наукова думка, 1982. –102 с.
2. Коул Р. Подводные взрывы. – М., ИЛ, 1950. – 494 с.
3. Наугольных К.А., Рой М.А. Электрические разряды в воде. – М., Наука, 1971. – 155 с.

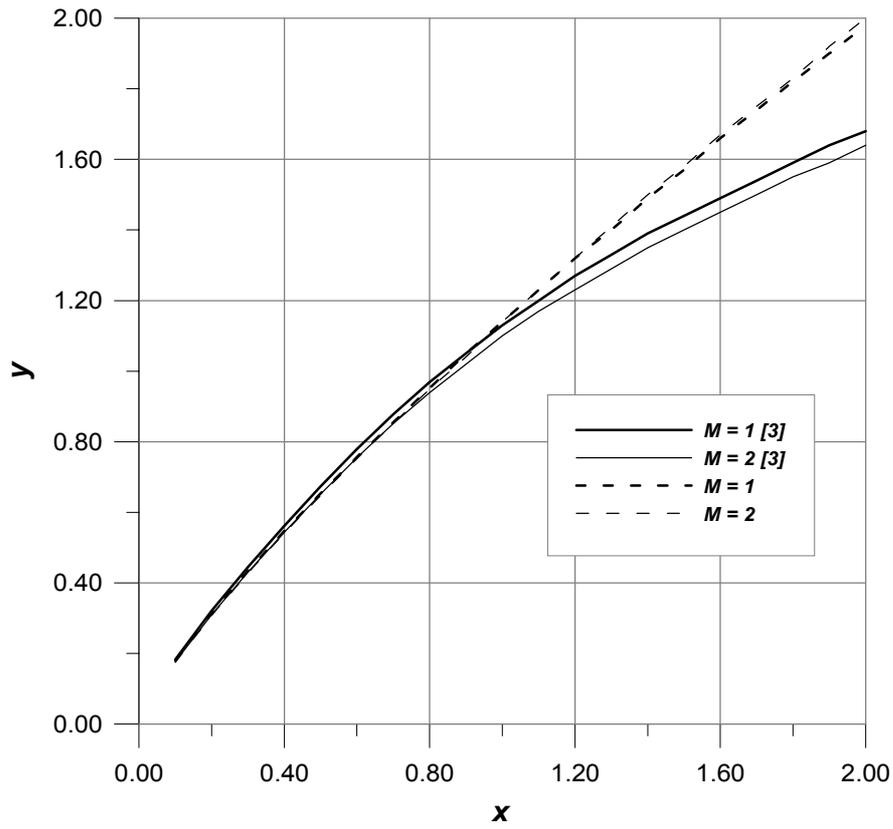


Рис. 1 - Зависимость безразмерного радиуса канала разряда от безразмерного времени

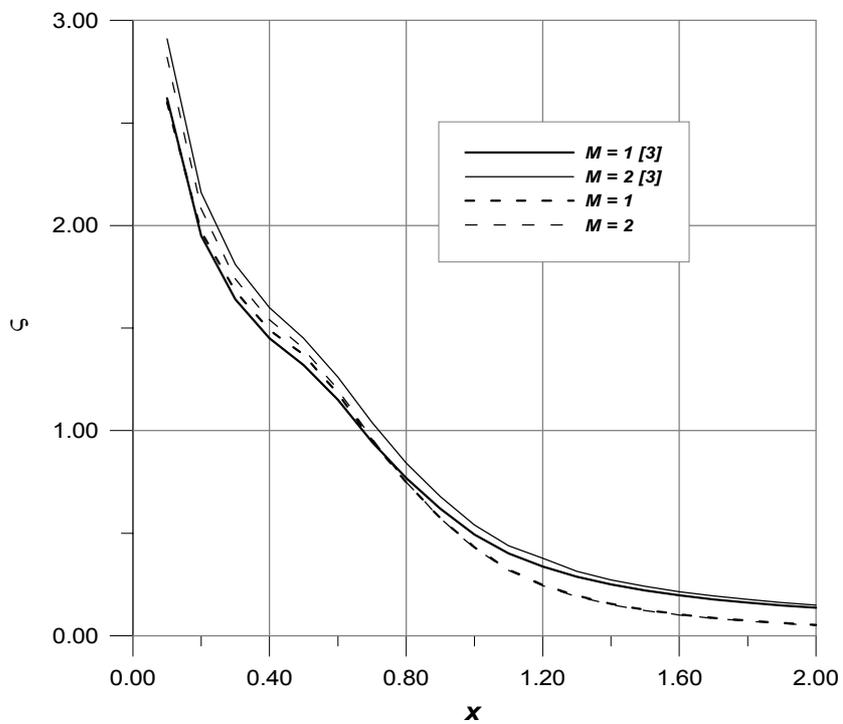


Рис. 2 - Зависимость безразмерной скорости стенки канала от безразмерного времени

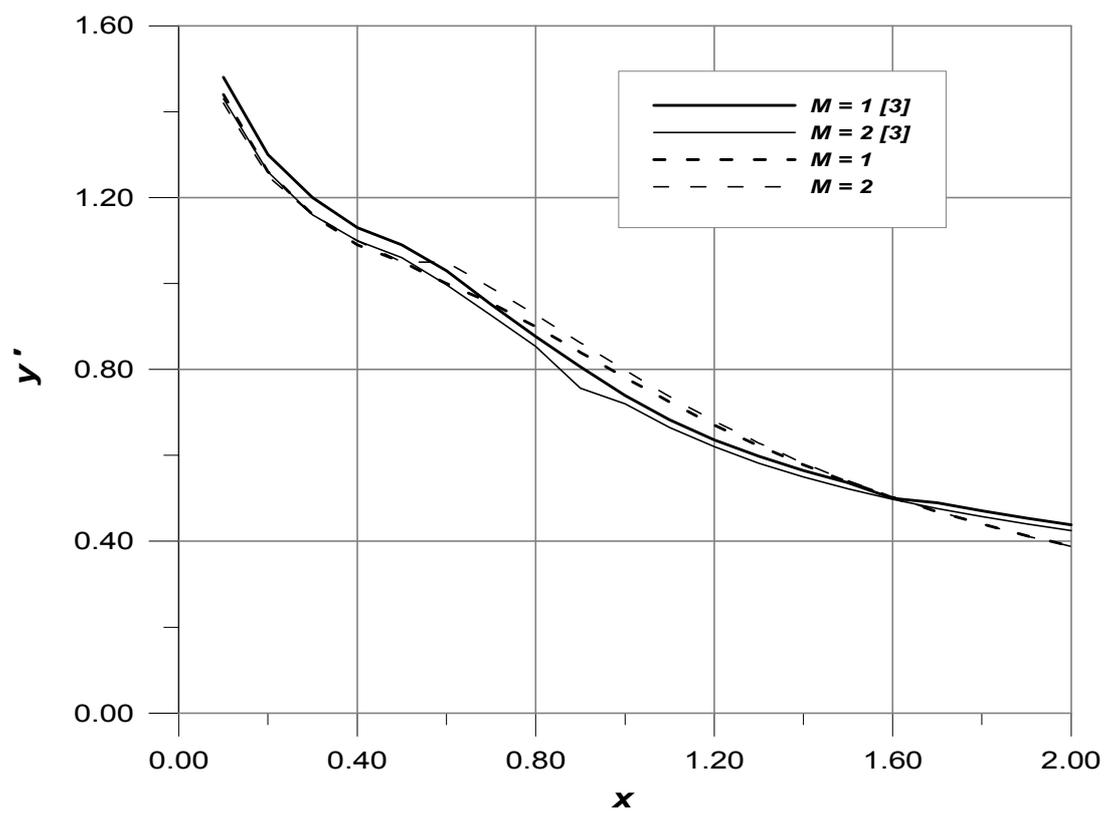


Рис. 3 – Зависимость безразмерного давления внутри канала от безразмерного времени